Termodinâmica - 2/2013

LISTA 5

1. Partindo da expressão da multiplicidade de um paramagneto de dois estados ideal em função da quantidade de dipolos paralelos ao campo externo B, encontre fórmulas para suas energia U e magnetização M em função de sua temperatura T.

2. Mostre que a entropia de um paramagneto de dois estados ideal, expressa como função da temperatura, é $S = Nk\ [\ln(2\cosh x)\ -x\tanh x]$, onde $x = \mu B/kT$. Comprove que esta fórmula tem o comportamento esperado quando $T \to 0$ e quando $T \to \infty$.

3. A multiplicidade de um sólido de Einstein contendo N osciladores e q unidades de energia é aproximadamente

$$\Omega(N, q) \approx \left(\frac{q+N}{q}\right)^q \left(\frac{q+N}{N}\right)^N .$$

(a) Parta desta fórmula e ache uma expressão para a entropia de um sólido de Einstein como função de N e q.
(b) Use o resultado do item (a) para obter a temperatura de um sólido de Einstein emm função de sua energia. (A energia é $U = q\epsilon$, onde ϵ é uma constante.) Simplifique a expressão obtida ao máximo possível.
(c) Inverta a relação encontrada no item (b) para obter a energia como função da temperatura, e use esta última para obter uma fórmula para a capacidade térmica do sistema.
(d) Mostre que, no limite $T \to \infty$, a capacidade térmica é $C = Nk$. (Dica: Quando x é muito pequeno, $e^x \approx 1 + x$.) Este resultado era esperado por você? Explique seu raciocínio.
(e) Deduza uma aproximação mais precisa para a capacidade térmica a altas temperaturas, incluindo termos de ordem x^3 na expansão das exponenciais e expandindo cuidadosamente o denominador. Jogue fora termos menores que $(\epsilon/kT)^2$ na resposta final. Depois de tudo feito, você deve encontrar $C = Nk[1 - \frac{1}{12}(\epsilon/kT)^2]$.

4. Considere um sólido de Einstein para o qual tanto N quanto q sejam muito maiores que 1. Pense em cada oscilador como uma "partícula" separada.
(a) Parta do resultado obtido no item (a) da questão acime e mostre que o potencial químico é

$$\mu = -kTln\left(\frac{N+q}{N}\right).$$

(b) Discuta este resultado nos limites $N >> q$ e $N << q$, focalisando em quanto S aumenta pela adição de uma nova partícula sem energia ao sistema.

5. Considere um gás ideal monoatômico a uma altitude z acima do nível do mar, de modo que cada molécula tem energia potencial mgz além de sua energia cinética.
(a) Mostre que o potencial químico é, neste caso, o mesmo que se o gás estivesse ao nível do mar mais um termo adicional mgz:

$$\mu(z) = -kTln[\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}] + mgz.$$

(Você pode deduzir este resultado a partir da definição termodinâmica do potencial químico $\mu = -T(\partial S/\partial N)_{U,V}$ ou da fórmula $\mu = (\partial U/\partial N)_{S,V}$.)

(b) Suponha que tenhamos duas amostras de gás hélio, uma ao nível do mar e outra na altitude z ambas com mesma temperatura e mesmo volume. Supondo que elas estejam em equilíbrio difusivo, mostre que o número de moléculas na amostra na maior altitude é

$$N(z) = N(0)e^{-mgz/kT},$$

em acordo com o obtido no problema 5 da lista 1.